# OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

## Etapa locală - 14. 02. 2015

## Clasa a IX – a

**PROBLEMA 1.** Să se calculeze suma $S_n = 1 + 12 + 112 + ... + \underbrace{111\dots1}_{(n-1)\text{ ori}}2$, pentru $n \geq 2$.

**PROBLEMA 2.** Fie numerele reale strict pozitive $x, y$ şi $z$, astfel încât $2x + 3y + 4z = 6$. Să se arate că :

a) $\sqrt{2x} + \sqrt{3y} + \sqrt{4z} < \dfrac{9}{2}$;

b) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} + \dfrac{4}{z} \geq \dfrac{27}{2}$.

**PROBLEMA 3.** Arătaţi că $\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\ \right] = \left[\sqrt{4n+2}\ \right]$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ (cu $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului $x$).

**PROBLEMA 4.** Fie pentagonul convex $ABCDE$ şi punctele $G_1$ şi $G_2$ centrele de greutate ale triunghiurilor $ABC$, respectiv $BCD$.

a) Arătaţi că dacă $M$ şi $N$ sunt mijloacele segmentelor $[AE]$, respectiv $[DE]$, atunci segmentele $[G_1N]$ şi $[G_2M]$ au un punct comun $G$, astfel încât $\dfrac{G_1G}{GN} = \dfrac{G_2G}{GM}$;

b) Aflaţi vectorul de poziţie al punctului $G$ determinat anterior, în funcţie de vectorii de poziţie ai punctelor $A, B, C, D$ şi $E$.

[1]Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2]Toate problemele sunt obligatorii;
[3]Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

# OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

## Etapa locală - 14. 02. 2015

## Clasa a X – a

**PROBLEMA 1.** Să se determine funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ cu proprietatea:

$$f\left(\frac{x}{2015}\right) \leq \log_{2015} x \leq f(x) - 1, \quad \forall\, x \in (0, +\infty).$$

**PROBLEMA 2.** a) Există numere iraţionale $a$ şi $b$ pentru care $a^b$ este număr natural ?

b) Un elev scrie pe tablă numerele $729,\ 15625,\ 343,\ 1331$. La pasul 1 şterge cele patru numere şi în locul fiecăruia scrie media geometrică a celorlalte trei numere. La pasul 2 aplică pasul 1 pentru numerele astfel obţinute. Continuă în acelaşi mod scrierea numerelor.

i) Ce numere a obţinut după primul pas?

ii) Este posibil ca după un număr finit de paşi să scrie pe tablă numerele $847,\ 567,\ 297,\ 8019$ ?

**PROBLEMA 3.** Fie numerele $a, b \in \mathbb{Z}$ şi $z \in \mathbb{C}$, astfel încât $z^2 - z + 5 = 0$. Să se arate că

$$(z-1)^a - (z+4)^b = 0$$

dacă şi numai dacă există un număr $n \in \mathbb{Z}$, astfel încât $a = 4n$ şi $b = 2n$.

**PROBLEMA 4.** Să se arate că, dacă $a, b, c \in \mathbb{C}$, $|a| = |b| = |c| = 1$ şi $|a+b|^2 + |b+c|^2 + |c+a|^2 = 4$, atunci triunghiul $ABC$ ale cărui vârfuri sunt punctele de afixe $a, b$ şi $c$ este dreptunghic.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

# OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

## Etapa locală - 14. 02. 2015

## Clasa a XI – a

**PROBLEMA 1.** Fie matricea $A \in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(A+I_3) = \det(A+2I_3)$. Să se demonstreze că

$$2\det(A+I_3) + \det(A-I_3) + 6 = 3\det(A).$$

**PROBLEMA 2.** Se consideră matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & h_a h_b \\ 1 & b & h_b h_c \\ 1 & c & h_c h_a \end{pmatrix},$$

unde cu $a, b, c$ se notează lungimile laturilor unui triunghi, iar cu $h_a, h_b, h_c$ lungimile înălţimilor triunghiului. Să se arate că $\det A \geqslant 0$. În ce condiţii avem $\det A = 0$ ?

**PROBLEMA 3.** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{\sqrt{n^2+5n+9}\,\right\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real $x$.

**PROBLEMA 4.** Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin $x_1 = 3$ şi $x_n = x_{n-1} + 2n + 1$, pentru $n \geq 2$.

a) Să se determine termenul general al şirului;

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\ln 2 + \ln\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x_{2k-1}}\right)\right)$.

[1]Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2]Toate problemele sunt obligatorii;
[3]Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

# OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

## Etapa locală - 14. 02. 2015

## Clasa a XII – a

**PROBLEMA 1.** Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_7 \right\}$, $O_2 = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$.

a) Demonstraţi că dacă $A \in G$ şi $\det(A) = \widehat{0}$, atunci $A = O_2$;

b) Demonstraţi că $G \setminus \{O_2\}$ este parte stabilă faţă de înmulţirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$;

c) Stabiliţi dacă ecuaţia $X^{12} = \begin{pmatrix} \widehat{2} & -\widehat{2} \\ \widehat{2} & \widehat{2} \end{pmatrix}$, are soluţii în mulţimea $G$.

**PROBLEMA 2.** Fie $(G, \cdot)$ un grup şi mulţimea $\mathrm{Z}(G) = \{x \in G : xy = yx,\ \forall\, y \in G\}$. Să se arate că dacă $x^2 = e$, pentru orice $x \in G \setminus \mathrm{Z}(G)$, atunci grupul este comutativ.

**PROBLEMA 3.** Fie funcţia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } 0 \le x \le 1 \\ x - 1, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$.

Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(e^t)}{f(e^{-t})} \mathrm{d}t$.

**PROBLEMA 4.** Să se determine valorile lui $n \in \mathbb{N}$, pentru care

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1+x)^n + (1-x)^n}{1+x^2} \mathrm{d}x \in \mathbb{Q}.$$

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.